

# MATEMATICKÁ GRAMOTNOST

Ukázky pracovních listů pro výuku Matematické gramotnosti na  
Gymnáziu v Olomouci-Hejčíně

Dana Vojtovičová

*Mezipředmětové  
vztahy v  
matematice*

# **ZMĚNA A VZTAHY**

# Optimalizace

## Úloha: Velikost krabice

Představ si, že chceš vyrobit krabici, do které by se mělo vejít  $0,02 \text{ m}^3$  drobných součástek. Krabice by měla mít čtvercovou podstavu a dvojitou tloušťku dna a víka. Cena recyklovaného ECO kartonu je 16 Kč za  $1 \text{ m}^2$ . Rozhodni, jaká velikost krabice je nejekonomičtější.



- a) Načrtni obrázek.
- b) Načrtni síť.
- c) Napiš vzorec pro objem krabice.
- d) Napiš vzorec pro povrch krabice.
- e) Nezapomeň na dvojitě dno a víko a urči celkovou plochu.
- f) Vymysli vztah pro cenu (tedy funkci dvou proměnných).
- g) Využitím vztahu pro objem napiš vztah pro cenu (jako funkci šířky, tedy jen jedné proměnné).
- h) Načrtni graf a z něj urči, pro jakou šířku dostaneme minimální cenu (příp. rozpětí).
- i) Navrhni optimální rozměry krabice.
- j) Kdybys chtěl takové krabice vyrábět a prodávat, měl bys také určit cenu krabice. Promysli, co všechno by do ceny mělo být dále zahrnuto.

Např.:

- náklady na lepidlo/svorky
  - náklady na montáž
  - ztráty vzniklé při řezání kartónu ...
- k) Zjisti minimální cenu dané krabice využitím derivace funkce.
  - l) Jak by se změnila velikost krabice a cena, pokud by nebylo zpevněno ani dno, ani víko?

# Grafy

**Úloha 1:** Načrtněte graf podle skutečného jízdního řádu vlaků (např. cesta z Liberce do Varnsdorfu v 18:38)

**SZDC** JÍZDNÍ ŘÁD 2017 platí od 11. prosince 2016

**⇄ 089 (platí 8.I. - 12.VIII.) Liberec - Zittau - Rybníště, Varnsdorf - Seiffhennersdorf**  
 ⇄ IDOL Liberec - Hrádek nad Nisou

km	km	SZDC, státní organizace / Die Länderbahn-GmbH DLB	Vlak	TL20622	TL20934	TL23988	TL20942	TL20626	TLX 5258	TL20928	TL20930	TL23950	TL23954	TL20932
			Ze stanice											
0	0	Liberec 030,036,037,086 ⇄0001		16 02	16 33		X 17 32	18 02	18 38		20 05	20 52	21 35	22 51
6	6	Machnín ⇄0001		x16 08			x17 38	x18 08			x20 09	x20 56	x21 39	x22 55
7	7	Machnín hrád ⇄0001		x16 07				x18 07			x20 10			x22 58
9	9	Chrastava-Andělská Hora ⇄0201		x16 09	x16 39		x17 39	x18 09	x18 44		x20 12	x20 59	x21 42	x22 58
11	11	Chrastava ⇄0201		16 14	16 44		17 44	18 14	18 48		20 16	21 04	21 48	23 02
14	14	Bílý Kostel nad Nisou ⇄0202		x16 17	x16 47		x17 47	x18 17	x18 51		x20 19	x21 07	x21 49	x23 05
18	18	Chotyně ⇄0102		x16 21	x16 51		x17 51	x18 21	x18 55		x20 23	x21 11	x21 53	x23 09
21	21	Hrádek nad Nisou ⇄0101	o	16 25	16 55		17 55	18 25	18 59		20 27	21 15	21 57	23 13
		Hrádek nad Nisou		16 30	16 57		17 59	18 30	19 02		20 28			23 15
27	27	Zittau	o	16 40	17 07		X 18 09	18 40	19 12		20 38			23 25
		Zittau		16 46	17 08			18 44	19 19	19 30	20 48			23 27
33	33	Mittelherwigsdorf/S.		x16 52	x17 14			x18 50		x19 36	x20 52			x23 33
37	37	Hainewalde		x16 58	x17 18			x18 54		x19 40	x20 58			x23 37
41	41	Großschönau/S.		17 00	17 22			19 02		19 44	21 00			23 41
45	45	Varnsdorf	o	17 04	17 26			19 06		19 48	21 04			23 45
0	0	Varnsdorf			17 26			19 06			21 04			23 45
2	2	Varnsdorf staré nádraží			x17 30			x19 10			x21 08			x23 49
3	3	Varnsdorf-pivovar Kocour			x17 32			x19 12			x21 10			x23 51
5	5	Seiffhennersdorf	o		17 38			19 16			21 14			23 55
45	45	Varnsdorf		17 04		18 01				19 48				
48	48	Dolní Podluží		x17 08		x18 04				x19 52				
51	51	Jiřetín pod Jedlovou		x17 13		x18 09				x19 57				
53	53	Horní Podluží		x17 15		x18 12				x19 59				
56	56	Rybníště 081	o	17 22		18 19				20 06				
		Do stanice							Dresden					

prodej jízdenek zajištěn ve vlaku dle tarifu dopravce jede v a a 13. - 16., 30.IV., 7., 24.V., 4.VI., 4., 5.VII. 1599 / 5258 Doksy - Dresden v a od 1.VII. do 12.VIII.

089 - 8.I. - 12.VIII. ⇄  
208

## Úloha 2: Jízda autobusem

Autobus vyjíždí ze zastávky a po době 30 s získá rychlost 54 km/h. Touto rychlostí pokračuje po dobu 2,0 min, a když řidič zaregistruje na křižovatce oranžové a červené světlo, během 50 s postupně zastavuje.

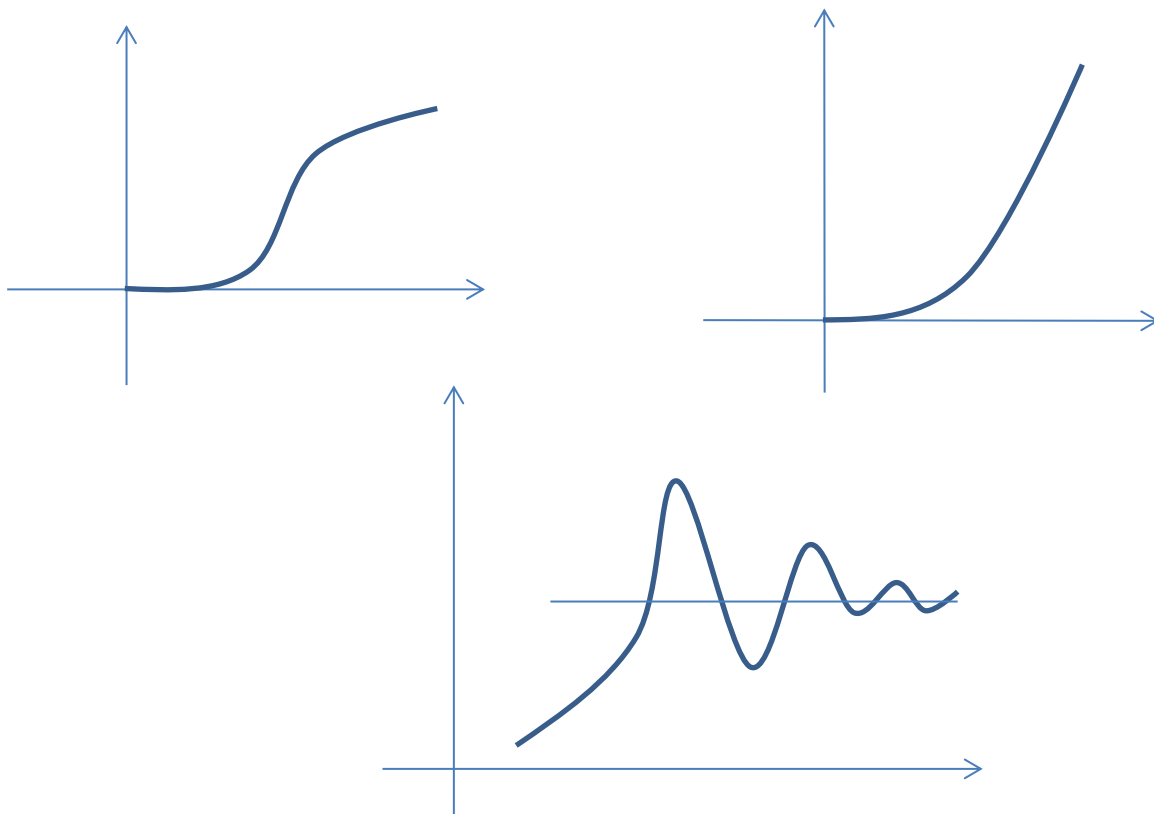
Na světelné křižovatce stojí celou minutu a potom se rozjede a tentokrát za dobu 50 s získá rychlost 45 km/h a poté pomalu po dobu 100 s zpomaluje, až zastaví na následující zastávce.

- zakresli do grafu  $v(t)$  průběh pohybu autobusu (přepokládejme, že rychlost se mění lineárně s časem)
- zjisti, jaká doba uplynula při jízdě mezi zastávkami
- zjisti, jak daleko jsou zastávky od sebe

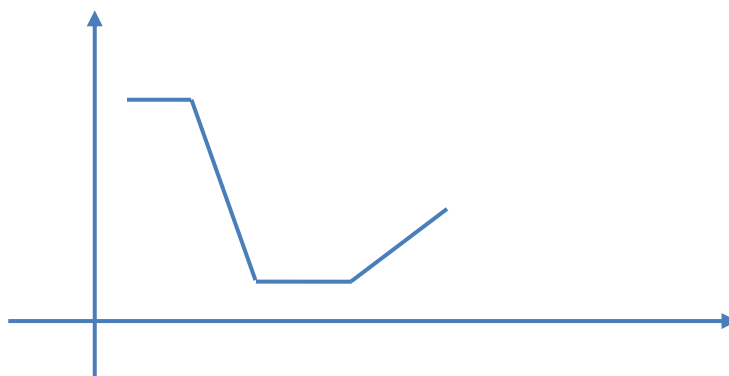


## Grafy II

**Úloha 1:** Najděte příklady reálných situací vyjádřené následujícími grafy a doplňte popis os (můžete využít internet).

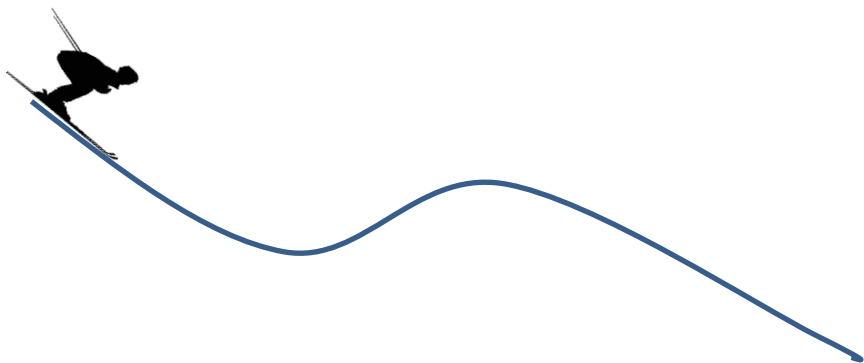


**Úloha 2:** Nalezněte co nejvíce interpretací pro tento graf. Své návrhy přehledně запиšte do tabulky.

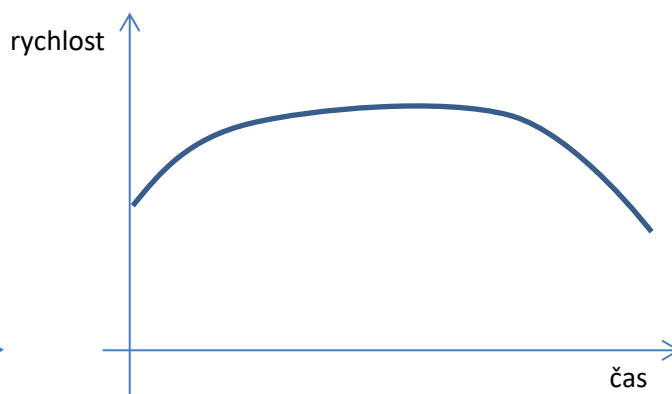
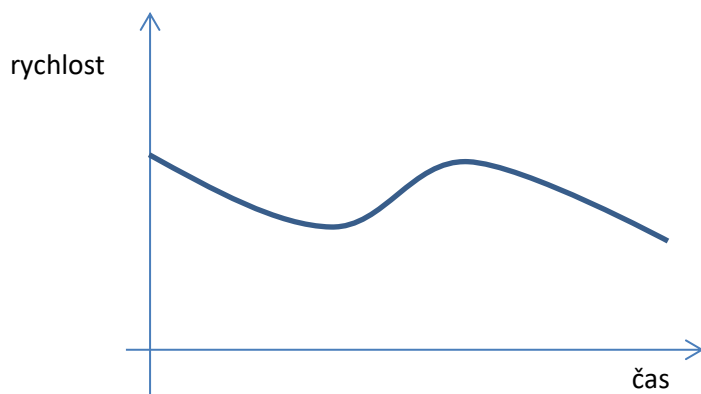
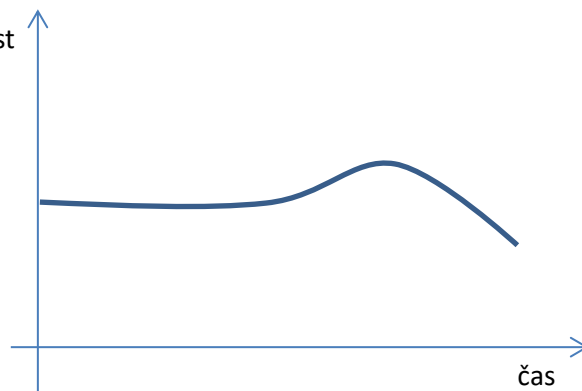
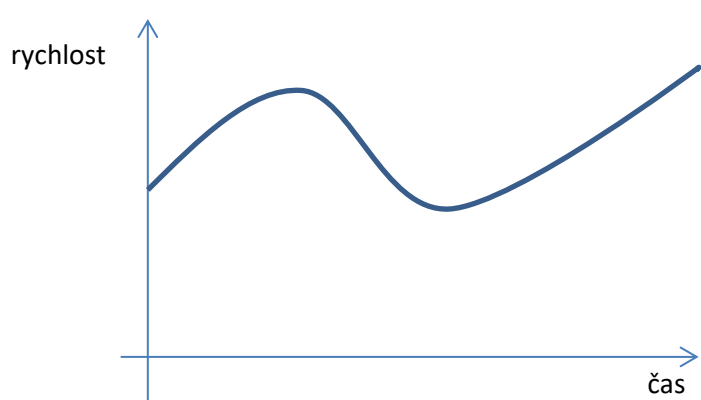


# Křivky

Úloha: Lyžař



Pouze jeden z následujících čtyř grafů přibližně znázorňuje situaci na předcházejícím obrázku:



# **KVANTITA**

## Srdeční tep

Lidé by se ze zdravotních důvodů neměli přepínat, např. při sporu, aby nepřekročili určitou frekvenci srdečního tepu.

Léta byl vztah mezi doporučenou maximální tepovou frekvencí a věkem osoby vyjadřován následujícím vzorcem:

*doporučená maximální tepová frekvence = 220 – věk.*

Poslední výzkumy ukázaly, že by se tento vzorec měl poněkud upravit. Podle nového vzorce je:

*doporučená maximální tepová frekvence = 208 – (0,7×věk).*

### Úloha:


a) V novinovém článku vyšlo: "Použijeme-li nový vzorec místo starého, zjistíme, že doporučený maximální počet úderů srdce za minutu pro mladší lidi poněkud poklesne a pro starší lidi poněkud vzroste."

Od jakého věku vzroste doporučená maximální tepová frekvence při použití nového vzorce? Zapiš svůj postup.

b) Výše uvedený vzorec se užívá také k určení toho, kdy je tělesné cvičení nejučinnější. Výzkum prokázal, že cvičení je nejučinnější, když tepová frekvence činí asi 80 % doporučené maximální frekvence.

Sestav vzorec pro výpočet tepové frekvence při největší účinnosti cvičení vyjádřený pomocí věku.

### Projekt:

- 1) Změř si svoji klidovou tepovou frekvenci (nejlépe ráno po probuzení)
- 2) Vypočítej si svou maximální tepovou frekvenci a ověř několika pokusy (běh, cvičení v TV, cvičení doma...)
- 3) Hodnoty zakresli do grafu
- 4) Vypočti hodnotu své tepové frekvence pro nejučinnější cvičení (pro spalování tuků) 
- 5) Najdi na Internetu jiné nebo přesnější metody určení maximální tepové frekvence zahrnující např. i pohlaví, klidovou frekvenci nebo předpokládanou zátěž.





## Zlaté cihly

Policistům se podařilo chytit všechny čtyři lupiče, kteří ukradli z banky kilogramové zlaté cihly. Lupiči se jmenují Anton, Benjamin, Cecil a Denis. Policie chtěla zjistit, kolik cihel přesně ukradli, a tak je vyslýchala. Zde jsou výsledky:

**Anton:** "Bylo jich víc než 25, ale míň než 30."

**Benjamin:** " Jejich počet byl dělitelný čtyřmi, tak bychom se snadno rozdělili, kdybyste nás nezabásli."

**Cyril:** "Bylo jich víc než 20, ale míň než 26."

**Denis:** " Určitě jich nebylo 24, protože tolik je mi let, a tak bych si to pamatoval."



a) Podle detektoru lži byla právě jedna výpověď nepravdivá, jenže policisté zapomněli napsat, která z nich to byla. Nejlepší detektivové na to po několika hodinách uvažování přišli. Zjistíš to také?

b) Kolik zlatých cihel tedy uloupili?



### Projekt:

- 1) Zjistěte na Internetu cenu kilogramového zlatého slitku (např. <https://zlataky.cz/investicni-zlate-slitky>). Jaké bohatství by lupiči získali v Kč, kdyby je nechtyli?
- 2) Mohli by je všechny z banky odnést v jednom plátěném pytli, jaký má lupič na obrázku? Jaký by mohl nastat problém?
- 3) Jaký objem zaujmají všechny cihly?
- 4) Urči z rozměrů slitku a jeho hmotnosti hustotu zlata. Ověř podle tabulek (Internetu). Proč se hodnoty lehce liší?
- 5) Jaké výhody a nevýhody mají investice do zlata?
- 6) Zjisti, jak se vyvíjí cena zlata na Londýnské burze. Roste nebo klesá cena zlata?

## Turnaj

1) Na turnaji hrály v rámci **skupiny A** čtyři týmy systémem každý s každým. Výsledky zápasů ukazuje první tabulka. Například Motor vyhrál nad Slavií 4:1, proto je v řádku Motor a sloupci Slavia zapsáno 4:1 a v řádku Slavia a sloupci Motor zapsáno 1:4.

	Viktoria	Motor	Slavia	Dukla
Viktoria		0:3	0:2	2:2
Motor	3:0		4:1	3:3
Slavia	2:0	1:4		1:2
Dukla	2:2	3:3	2:1	

Skupina A					
Motor	2	1	0	10 :4	7
Dukla					
Slavia	1	0	2	4:6	3
Viktoria	0	1	2	2:7	1

Druhá tabulka ukazuje pořadí týmů. První číslo značí počet výher, druhé počet remíz, třetí počet proher, čtvrtý sloupec udává skóre, poslední počet bodů.

a) Kolik utkání bylo ve skupině A sehráno?

b) Dokázal bys vyplnit tabulku, kdybys znal jen jejich 6 výsledků vpravo nahoře (nad vystínovanými buňkami)? Jak?

c) Které shodné zobrazení v rovině ti tabulka připomíná?

d) Kolik bodů získává podle druhé tabulky tým za výhru, remízu a prohru?

e) Doplně údaje pro Duklu v druhé tabulce.



2) Ve **skupině B** hrály proti sobě také 4 týmy: Lhota, Újezd, Habří a Buková. Habří vyhrálo nad Lhotou 4:1. V jediném utkání, které skončilo remízou, padly celkem dva góly. Kapitán Újezdu prohlásil: "Zas takový neúspěch to nebyl, ve dvou zápasech ze tří jsme dokázali skórovat."

	Lhota	Újezd	Habří	Buková
Lhota				
Újezd				
Habří				
Buková				

Skupina B					
Habří	2	1	0	8:2	7
Lhota	2	0	1	4:5	6
Buková	1	1	1	4:4	4
Újezd	0	0	3	3:8	0

a) Vyplň na základě informací v zadání čtyři buňky první tabulky.

b) S využitím tabulky vpravo dopiš skóre utkání Habří - Újezd.

c) Doplně výsledky všech zápasů.



## Procenta

### Úloha 1: Svatební šaty

Svatební šaty byly nejdříve o 10 % zlevněny a poté o 10 % zdraženy. Byla konečná cena stejná jako původní?

Co kdyby byly šaty nejdříve zdraženy a pak zlevněny? Co by se změnilo?

Přesvědčte se výpočtem pro šaty, jejichž původní cena byla 21 000 Kč.

### Úloha 2: Platy

V televizi bylo oznámeno, že je třeba zvednout platy lékařům, a že vláda počítá se zvýšením jejich platů o 10 % každý rok, po dobu tří let.

Učitelé by prý mohli taky dostat přidáno, a to jednorázově o 30 %. Je to totéž? Kdo by dostal v delším horizontu více?

### Úloha 3: Zájezd

Zájezd byl nejdříve zlevněn o 15%, poté kvůli kurzovým změnám zdražen o 9 % z nové ceny a zanedlouho opět zlevněn o 5 % z poslední ceny.

- Kolik procent z původní ceny činí konečná cena zájezdu? Umíte ji zjistit, aniž byste znali některou z cen?
- Jestliže konečná cena byla 20 000 Kč, kolik stál zájezd původně?
- pokud by počáteční cena byla 20 000 Kč, kolik by nakonec stál zájezd?

### Úloha 4: Záhon

Na kruhový záhon na zahradě o průměru 3 m chceme zasadit rostliny tak, aby na 4 dm<sup>2</sup> připadala jedna rostlina. 5000 zrn váží 1,7 g. Semena se prodávají v balíčcích po 0,05 g a jeden balíček semene stojí 29 Kč. Ze zasazených semen vyklíčí jen asi 75 % a z vyklíčených rostlinek pak ještě do výsadby uvadne asi 30 %.

- Zjistěte plochu záhonu, kterou chceme osít (Vypočítejte v dm a zaokrouhlete na jednotky).
- Kolik rostlinek se vejde na jeden záhon?
- Kolik % činí klíčivost a kolik % činí pěstební odpad?
- Kolik zrn budeme potřebovat?
- Kolik balíčků semene budeme muset koupit a kolik nás to bude stát?



## Letectví - spotřeba paliva letadla I

Letadlo potřebuje palivo stejně jako kterýkoliv jiný dopravní prostředek (i když "palivo" je někdy nahrazováno silou lidských svalů). Ale kolik paliva letadlo ve skutečnosti spotřebuje? A kolik je to v porovnání například s jízdou autem nebo plavbou lodí?



### Úloha:

Boeing 737-800 (což je typické letadlo střední velikosti používané mnoha aerolinkami) má letět z Vídně do Dubaje. Vzdálenost mezi těmito dvěma městy je 2 450 NM (námořních mil), což odpovídá 4 537 km. Průměrná rychlost během tohoto letu je 445 uzlů (námořních mil za hodinu).

- a)** Odhadněte, kolik paliva je potřeba pro tento let. Svůj odhad (v kilogramech, litrech) si poznamenejte.
- b)** Odhadněte, jakou maximální rychlostí může tento Boeing letět (v km/h) a svůj odhad ověřte na Internetu.
- c)** Zjistěte, jaký má toto letadlo maximální dolet, dostup, kapacitu, rozměry a kolik se do něj vejde maximálně paliva.

### *Poznámka:*

Dostup = největší výška, jíž může dosáhnout určité letadlo při normovaných povětrnostních podmínkách a plném výkonu motorů.

- d)** Kde leží Dubaj?

## Letectví - spotřeba paliva letadla II

Množství paliva nutné pro linkové letadlo se skládá z několika částí, které se počítají před každým letem. Minimální množství paliva se skládá z:

- a) paliva pro poježdění letadla z parkovací pozice na ranvej (jednotná spotřeba: 200 kg),
- b) paliva pro let z letiště v místě odletu na letiště v místě příletu,
- c) 5 % z b) jako rezervy kompenzující změnu větru, nižší letovou výšku, případnou odchylku z dráhy letu kvůli blesku apod.,
- d) paliva pro let z letiště v místě příletu na náhradní letiště (např. pro případ špatného počasí nebo uzavření ranveje na letišti v místě příletu) standardní rychlostí 380 uzlů (námořních mil za hodinu),
- e) minimálního množství paliva v nádrži (po přistání tam musí zůstat palivo na 30 minut letu).



### Úloha 1:

Boeing 737-800 letí z Vídně do Dubaje. Jak už víme, vzdálenost mezi těmito dvěma městy je 2 450 NM (námořních mil) = 4 537 km. Náhradní letiště je Muscat vzdálené od Dubaje 160 NM. Letadlo má dva motory, každý spotřebuje 1 200 kg paliva za hodinu. Vypočítejte minimální množství paliva, které je nutné pro tento let.

*Pomůcka:*

Vypočítejte palivo pro let b), potom vypočítejte a přičtěte další palivo c), d) a e) a pak přičtěte palivo pro poježdění a).

### Úloha 2:

Typická vzletová hmotnost Boeingu 737-800 je 50 000 kg. Kolik práce je třeba ke zrychlení letadla z klidu do vzletové rychlosti (přibližně 160 uzlů), nebereme-li v úvahu odpor vzduchu?

## Letectví - spotřeba paliva letadla III

Ted' víme, kolik paliva potřebuje letadlo k letu z Vídně do Dubaje. Ale jak dlouho vlastně trvá doplnění paliva?

A existuje nějaký způsob, jak ušetřit palivo během letu?

Zkuste něco navrhnout!

Na velkých letištích se palivo čerpá do letadel pomocí podzemního potrubí. Na letištích se však měří objem paliva, ne hmotnost.



### Úloha:

- Kolik litrů paliva je nutno natankovat do nádrží, pokud je hustota paliva  $0,79 \text{ kg/l}$ ?
- Jak dlouho trvá tankování, pokud je průtok  $14 \text{ l/s}$  a v nádržích zbylo  $3,2 \text{ tun}$  paliva?
- Piloti přemýšlejí o tom, že by letěli níže, než je plánováno, protože pokud poletí o  $4\,000$  stop níže, zadní vítr bude o  $25$  uzlů silnější. Šetří tato možnost palivo, vezmeme-li v úvahu, že na každých  $1\,000$  stop, o které letí letadlo níže, je spotřeba paliva o  $1\%$  vyšší? Kolik paliva se tím ušetří, pokud vůbec?

*Pomůcka:*

Přičtete rychlost zadního větru k rychlosti letadla a potom zopakujte výpočty z pracovního listu **Letectví - spotřeba paliva letadla II**, přičemž berte v úvahu, že motory nyní spotřebují více paliva (o kolik procent?), protože letadlo letí níž.

- Piloti přemýšlejí o snížení vzdušné rychlosti, aby ušetřili palivo. O kolik (v %) mohou snížit vzdušnou rychlost, pokud je maximální povolená doba letu  $5 \text{ hodin } 46 \text{ minut}$ , aby nedošlo ke zpoždění? Kolik paliva se tím může ušetřit za předpokladu, že  $1\%$  snížení vzdušné rychlosti znamená snížení spotřeby paliva o  $1\%$ ?

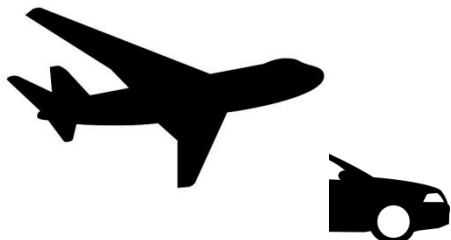
*Pomůcka:*

Použijte maximální dobu letu  $5 \text{ h a } 46 \text{ min}$  a potom vypočtete spotřebu paliva jako v listu **Letectví - spotřeba paliva letadla II**.

- Jak velká je jedna stopa? O kolik metrů poletí piloti níž (viz c)?
- Proč je pro spotřebu paliva lepší létat ve vyšších letových hladinách?
- Najděte na Internetu další výhody vyšší letové výšky.
- Proč existuje maximální výška (dostup), ve které letadlo může letět?

## Letectví - spotřeba paliva letadla IV

Teď už víme, kolik paliva potřebuje letadlo, aby uletělo 4 537 km z Vídně do Dubaje. Vypadá to jako spousta paliva, ale jak je to v porovnání s cestou autem na stejnou vzdálenost? Nebo lodí?



### Úloha:

**a)** Průměrné auto potřebuje kolem 7 l (5,5 kg) paliva na 100 km. Kolik paliva by auto spotřebovalo na cestu z Vídně do Dubaje vzdušnou čarou (4 537 km)?

**b)** Nejpřímější silniční spojení mezi Vídní a Dubají má 5 424 km. Kolik paliva spotřebuje auto z úkolu a) na tuto vzdálenost?

**c)** Výsledky úkolů a) a b) snad ukážou, že cesta autem z Vídně do Dubaje spotřebuje méně paliva než let Boeingem 737-800. Ale auto uveze v průměru čtyři osoby, zatímco letadlo 189 pasažérů. Kolik paliva na pasažéra je potřeba při cestě autem a kolik při cestě letadlem?

**d)** Vyhledejte na Internetu spotřebu paliva průměrné výletní lodi. Potom vypočítejte množství paliva nutné pro plavbu výletní lodí z Janova (přístav výletních lodí nejbližší Vídní) do Dubaje. Vzdálenost po moři je 7680 km. Vypočítejte spotřebu paliva na pasažéra a porovnejte ji s výsledky úkolů b) a c).

### Doplňující úlohy:

**e)** Zjistěte, jakou průměrnou spotřebu má vaše auto a na kalkulačce <http://www.ekoblog.cz/?q=emise> určete množství emisí CO<sub>2</sub> na 1 ujetý kilometr.

## Nepříměřená rychlost I

Nepříměřená rychlost se podílí 36 % na počtu usmrčených osob při dopravních nehodách a 16 % na počtu nehod (viz statistika na internetu Dopravní nehody v roce 2017).

Podívejme se z pohledu matematiky (a fyziky), proč tyto nehody končí vážnými zraněními a často i smrtí.

### Okénko do fyziky:

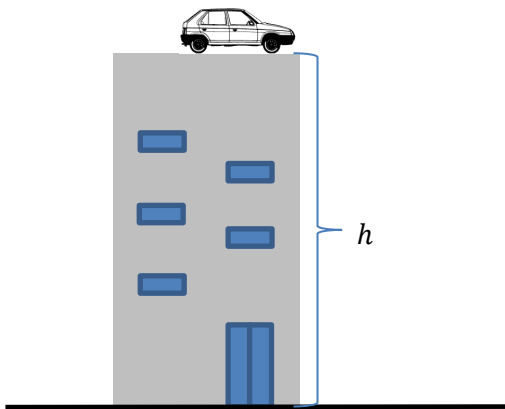
Každé pohybující se těleso má kinetickou energii  $E_k$ , jejíž velikost závisí na jeho hmotnosti  $m$  a na jeho rychlosti  $v$  vztahem:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Ze vztahu vyplývá, že kinetická energie vzrůstá lineárně s hmotností tělesa a **kvadraticky** s jeho rychlostí. A právě tuto druhou závislost (obrovský nárůst kinetické energie auta při zvyšování rychlosti) by měli mít na zřeteli především ti řidiči, kteří nebezpečí rychlé jízdy podceňují.

### Úloha 1:

- a) Kolikrát se zvýší kinetická energie auta, které zvýší svou rychlost dvakrát?
- b) Má auto stojící na střeše domu kinetickou energii?



- c) Má potenciální energii?

Potenciální energie auta:  $E_p = mgh$

$m$  je hmotnost auta

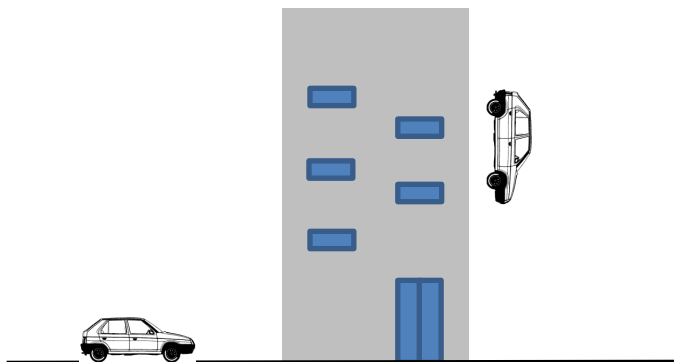
$g$  je tíhové zrychlení ( $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ )

$h$  je výška nad zemí



## Nepříměřená rychlost II

Představme si dvě situace: buď auto spadne ze střechy domu, anebo totéž auto narazí na zeď domu.



Jestliže má být účinek nárazu stejný, pak podle **zákona zachování mechanické energie** musí také platit:

$$E_p = E_k$$

### Úloha 2:

Z jaké výšky my muselo auto spadnout, aby měl náraz do domu rychlostí 72 km/h přibližně stejné ničivé účinky jako kdyby spadlo ze střechy?

Nejdříve to zkuste odhadnout.

- 1) porovnejte energie a vyjádřete  $h$  ze vzorce
- 2) převedte rychlosti **72 km/h**, **130 km/h** a **216 km/h** na m/s
- 3) dosadte tyto rychlosti do vzorce pro  $h$  a výsledky zobrazte v tabulce.



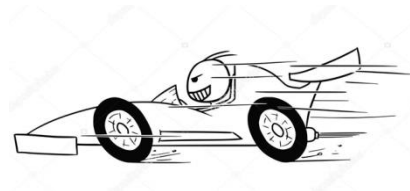
### Doplňte:

Rychlost jsme zvýšili ze 72 km/h na 216 km/h, tj. pouze **3** ×, ale účinek by byl ničivější .....(jako bychom spadli z ..... m).

## Nepříměřená rychlost III

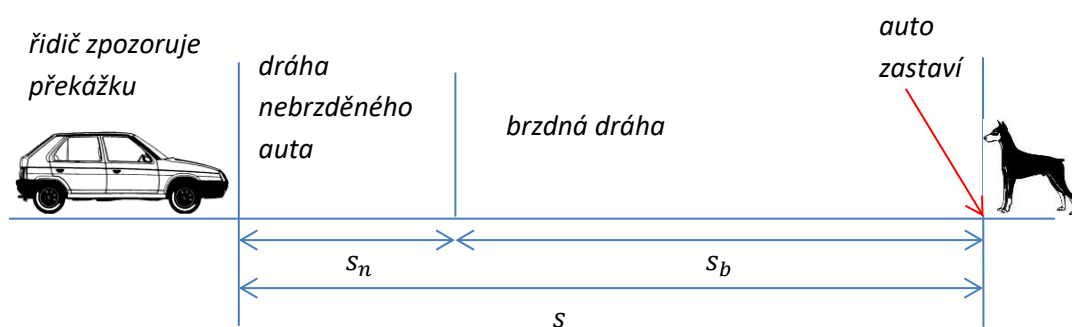
### Úloha 1: Anketa

Zeptejte se řidičů aut, jak dlouhou dráhu by ujeli od okamžiku, kdy zpozorují nebezpečí a začnou brzdit až k okamžiku, kdy auto zcela zastaví, jestliže by jeli na přímé suché asfaltové silnici přiměřenou cestovní rychlostí 70 km/h.



Celková dráha, kterou auto projede od okamžiku, kdy řidič zpozoruje překážku, až do okamžiku, kdy se auto po brzdění zastaví, se skládá ze dvou složek:

- z dráhy nebrzděného vozidla  $s_n$
- z brzdné dráhy  $s_b$



Dráha nebrzděného auta se určuje jako součin  $s_n = v \cdot k$

- $k$  je koeficient, který má u pozorného řidiče a rychle účinkující brzd číselnou hodnotu 1
- $v$  je rychlost auta před brzděním

Dále budeme potřebovat:

- $a$ , což je zpomalení, které závisí na stavu vozovky (suchá nebo mokrá, betonová, dlážděná nebo asfaltová apod.)
- vzorec pro  $a$ :  $a = \frac{v}{t}$  ( $v$  je počáteční rychlost, konečná rychlost je nulová - auto stojí)
- vzorec pro dráhu zpomaleného pohybu (do zastavení):  $S = \frac{1}{2} a \cdot t^2$

**Úloha 2:** Vyjádřete brzdnou dráhu pomocí zpomalení  $a$  a rychlosti  $v$ .

**Úloha 3:** Vypočtěte celkovou dráhu, kterou auto projede od okamžiku, kdy řidič zpozoruje překážku, až do okamžiku, kdy se auto po brzdění zastaví, jestliže auto jede po přímé suché asfaltové silnici rychlostí 70 km/h.

Pro suchou asfaltovou vozovku má  $a$  hodnotu  $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  a  $k$  vezměte rovno 1.

## Snowboarding

Hrubý odhad dvou skupin vyznavačů zasněžených svahů činí 8 miliónů snowboardistů ku 50 miliónům lyžařů. Počet snowboardistů a lyžařů pomáhá určovat statistika prodaného materiálu, který však není zdaleka určující. Pro orientaci uvádím několik čísel:

Počet snowboardistů ve světě:

<b>Amerika</b>	3,7 milionu
<b>Evropa</b>	?
Německo	?
Francie	500 000
Itálie	250 000
Rakousko	225 000
Švýcarsko	?
<b>Japonsko</b>	?
<b>Zbytek světa</b>	0,3 milionu



V tabulce jsou uvedeny jen vybrané údaje, neznamená to tedy, že by například v Čechách nebo v Číně nebyl snowboardista žádný (Češi jsou zahrnuti v Evropě, Číňani ve "zbytku světa").

Celkový počet snowboardistů ve světě je součtem údajů za Ameriku Evropu, Japonsko a "zbytek světa".

Otazníky v tabulce neznamenají, že by tyto údaje nebyly známy, jejich výpočet bude předmětem vašeho dalšího úkolu.

### Úloha:

Na základě informací z úvodu a následujících tvrzení spočtete chybějící údaje z tabulky.

- 1) Součet snowboardistů Německa a Švýcarska tvoří 32 % z počtu evropských snowboardistů.
- 2) V Japonsku je 2,5krát více snowboardistů než v Německu.
- 3) V Americe je o dva miliony snowboardistů více než ve Švýcarsku a Japonsku dohromady.

# NEURČITOST

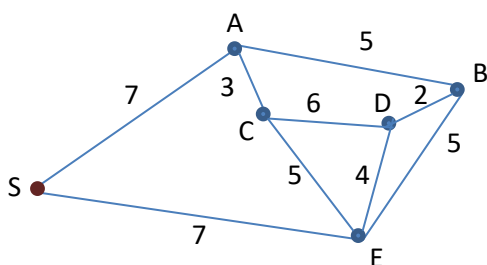
## Dopravní problém



Dopravními problémy nazýváme úlohy, jejichž řešení nám umožňuje rozhodnout, zjednodušeně řečeno, jak nejlevněji rozvézt suroviny, výrobky apod. z jednoho místa na druhé.

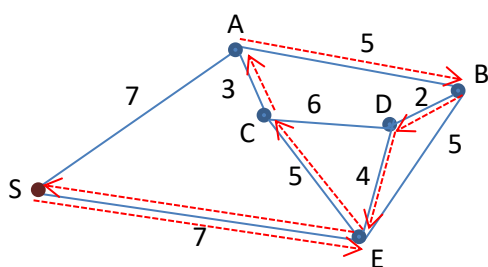
Podívejme se na úlohu pěti prodejen A, B, C, D, E, které jsou zásobovány ovocem ze skladu S. Předpokládejme, že k rozvozu má sklad jediné nákladní auto. Naším úkolem je navrhnout nejvýhodnější rozvoz ovoce ze skladu tak, aby byl počet ujetých kilometrů co nejmenší.

Kilometrové vzdálenosti mezi jednotlivými místy jsou udány v grafu.



Na první pohled je vidět, že možností rozvozu ovoce ze skladu do prodejen je víc.

Jedna z nich je znázorněna na následujícím obrázku:



Délka této trasy je  $7 + 5 + 3 + 5 + 2 + 4 + 7 = 33$  km

Ale je tato trasa nejkratší? Nejspíš ne, protože jednu trasu (z S do E) jsme projeli dvakrát.

**Úloha:** Navrhněte nejvýhodnější trasu pro rozvoz ovoce ze skladu tak, aby byl počet ujetých kilometrů co nejmenší.

# Pravděpodobnost, nezávislé jevy I

## Monte Carlo aneb Kdo vyhraje v ruletě?

Řekneme-li Monte Carlo, vybaví se nám světoznámý závod automobilů nebo hráčské herny s ruletami. Monacké knížectví přikládá větší význam hráčským hernám. Není divu, protože státní rozpočet Monaka je kryt v nemalé míře především z daní, které herny odevzdávají do státní pokladny.

Ruleta je kotouč rozdělený na 37 stejných výsečí s prohlubněmi, které jsou označeny čísly od 0 do 36, přičemž výseče označené čísly od 1 - 36 jsou střídavě zbarveny červeně a černě. Zbývá výseč je označena číslem 0, které nepočítáme ani k lichým, ani k sudým číslům.

Když se kotouč roztočí a v protisměru se hodí kulička, hráči uzavírají sázky, že se po zastavení kotouče ustálí kulička na např. na určitém čísle, na sudém čísle nebo na lichém čísle apod.

Při uhodnutí jim krupiér vyplácí výhry podle druhu sázky.



Například když hráč vsadí 50 eur, že se kulička zastaví na sudém čísle, a kulička se zastaví na čísle 26, vyhraje dvojnásobnou částku, tj. 100 eur. Není to vábivá představa?

**Úloha:** Dokažte, že ruleta je pro hráče hrou nespravedlivou.

Vypočítejte pravděpodobnost, s jakou se kulička zastaví na nějakém sudém čísle.

*Poznámka:* nulu k sudým číslům nepočítáme.

## Pravděpodobnost, nezávislé jevy II

### Úloha: Hladomorna

Správce hradu se rozhodl připravit pro návštěvníky neobvyklou atrakci. Do hladomorny dal umístit truhlici s 50 měšci, z nichž 5 je naplněno pravými mincemi. Na závěr prohlídky se každý z návštěvníků může nechat spustit na dno temné hladomorny a z truhlice naplněné měšci si jeden bez otevírání vybrat a ponechat.



Emil byl při spuštění do hladomorny pátý v pořadí. Ani jeden z jeho čtyř kamarádů si předtím nevytáhl měšec s pravými mincemi. Který z výroků nejlépe popisuje Emilovu situaci? Svou odpověď zdůvodni.

- A. Ani Emilovi se nepodaří získat měšec s pravými mincemi, když se to nepodařilo žádnému z jeho kamarádů.
- B. Pravděpodobnost, že Emil získá měšec s pravými mincemi, je 10%.
- C. Pravděpodobnost, že Emil získá měšec s pravými mincemi, je větší než u jeho kamarádů, kteří se o to pokusili před ním.
- D. Emil má stejnou naději na získání měšce s pravými mincemi jako jeho kamarádi, protože je to náhoda.



## Pračky

Společnost AVA vyrábí dva druhy praček: s předním plněním a s horním plněním. Na konci výrobní směny jsou pračky testovány a ty, které jsou vadné, jsou staženy a poslány k opravě.



V tabulce vidíš průměrný počet obou druhů praček, které jsou vyrobeny za jednu směnu, a průměrné procento vadných praček za jednu směnu.

Typ pračky	Průměrný počet praček vyrobených za jednu směnu	Průměrné procento vadných praček za jednu směnu
Pračka s horním plněním	2 000	5 %
Pračka s předním plněním	6 000	3 %

**Úloha:** V tabulce jsou tři tvrzení o výrobní směně ve společnosti AVA. Jsou tato tvrzení pravdivá?

V každém řádku zakroužkuj „Ano“ nebo „Ne“.

Tvrzení	Je tvrzení pravdivé?
Třetinu praček vyrobených za jednu směnu tvoří pračky s horním plněním.	Ano/Ne
V každé sadě 100 vyrobených praček s horním plněním je přesně 5 vadných.	Ano/Ne
Jestliže vybereme náhodně jednu pračku s předním plněním vyrobenou během jedné směny, pravděpodobnost, že bude potřebovat opravit, je 0,03.	Ano/Ne



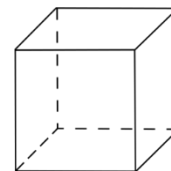
**PROSTOR**

**A**

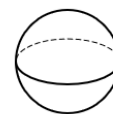
**TVAR**

## Povrch a objem I

**Úloha 1:** Hrana krychle se zvětší dvakrát. Kolikrát se zvětší její povrch? Kolikrát se zvětší její objem?



**Úloha 2:** Poloměr koule se zvětší dvakrát. Kolikrát se zvětší její povrch? Kolikrát se zvětší její objem?



### Kritické množství

Aby mohla nastat řetězová štěpná reakce, je potřeba mít v určitém objemu soustředěno dostatečné množství (hmotnost) štěpného materiálu - nejméně tzv. kritické množství štěpného materiálu; při menším množství uniká povrchem převážná většina neutronů dříve, než stačí rozštěpit nějaké další jádro.

Kritické množství je tím menší, čím kompaktnější je geometrické uspořádání.

**Úloha 3:** Jaký geometrický útvar má nejvyšší poměr objemu k velikosti povrchu?

Zvolme objem všech útvarů  $1 \text{ m}^3$ . U válce a kužele zvolme výšku 1 m.

- Z těchto údajů vypočtete další rozměry útvarů.
- Určete povrch všech útvarů.
- Určete podíl objemu k povrchu.
- Vyjádřete tento podíl obecně.
- Doplň tabulku

*Poznámka:* Disk - válec s výškou výrazně menší než je jeho poloměr.

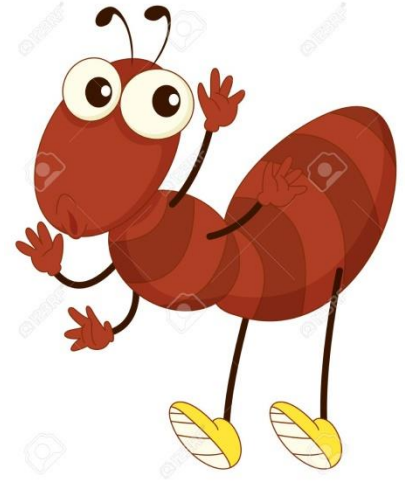
	Povrch (vzorec)	Objem (vzorec)	Rozměr/m	Rozměr/m	Rozměr	$\frac{V}{P}$ obecně	$\frac{V}{P}$ číselně
Koule			$r =$	—	—		
Válec			$v = 1$	$r =$	—		
Disk			$v = 0,2$	$r =$	—		
Krychle			$a =$	—	—		
Kužel			$v = 1$	$r =$	$s =$		

**Úloha 4:** Jaké uspořádání štěpného materiálu je pro daný objem výhodnější: disk nebo koule? V kterém případě bude muset mít štěpný materiál větší objem pro dosažení kritického množství? (disk nebo koule).

## Povrch a objem II

Na základě předchozího příkladu zkus vysvětlit některé z následujících jevů:

- a) Vítr zvedá písek (malé kamínky), ale nezvedá větší balvany ze stejného materiálu.
- b) Mravenec se nezabije ani při pádu ze čtvrtého patra (člověk většinou ano).
- c) Velikost teplokrevných živočichů většinou vzrůstá se zeměpisnou šířkou jejich výskytu.
- d) Mýdlová bublina zaujme tvar koule.



- e) Kapka vody zaujme tvar koule, v prostředí bez gravitace nebude koule zdeformovaná.



## Povrch a objem III

### Cheopsova pyramida

Pyramidy v Gíze patří k jednomu z dochovaných divů světa.

V dávné minulosti bývalo toto místo pohřebištěm významných osobností tehdejší společnosti, především pak samotných panovníků.



Asi neznámější je tzv. Cheopsova pyramida.

Až do 80. let 19. století byla nejvyšší lidskou stavbou na světě. Pouze chybějící špička kazí dojem dokonalého jehlanu.

Původně dosahovala výšky 147 m (146,59 m). Její čtyři stěny směřují do jednotlivých světových stran.

Od středu planety ji pak dělí stejná vzdálenost jako od severního pólu.

Obvod základny pyramidy se skoro přesně rovná obvodu kružnice o poloměru rovném výšce pyramidy. Pokud obvod základny pyramidy vydělíme její dvojnásobnou výškou, dostaneme výsledné číslo 3,14. Je tedy možné, že staří Egypťané znali číslo  $\pi$ .

V dobách své největší slávy byla Cheopsova pyramida obložena deskami z bílého vápence, který výborně odrážel sluneční světlo a vyvolával tak dojem, že pyramida září.

### Úloha:

Cheopsova pyramida má přibližně tvar pravidelného čtyřbokého jehlanu o základně 230 m a výšce 140 m.

- Kolik fotbalových hřišť o rozměrech 90x45 m by se vešlo na místo základny pyramidy?
- Cheopsova pyramida je prý nejobjemnější stavba na světě. Zjistěte její objem.
- Kolik kamenných kvádrů o objemu  $1,05 \text{ m}^3$  bylo potřeba na její stavbu?
- Kolik mramorových desek o ploše  $0,5 \text{ m}^2$  by bylo potřeba na její vnější obložení?
- Vypočtěte sklon pyramidy.
- Dokažte, že podíl obvodu základny pyramidy a její dvojnásobné výšky dá Ludolfovo číslo.

## Povrch a objem IV

### Cheopsova pyramida

Cheopsova pyramida je největší pyramidou na světě. Původně dosahovala výšky 147 m (146,59 m). Dnes má výšku asi 140 m (138,8 m).



#### Úloha 1:

- a) Kolik pater by musel mít mrakodrap, aby byl vysoký jako Cheopsova pyramida? Uvažujte výšku patra asi 4 m.
- b) Kolikrát vyšší je dnes nejvyšší stavba světa?
- c) Má pyramida skutečně 4 boční stěny? Najděte informace na internetu.

Jedná se o nejmotnější stavbu na světě. Na celou stavbu bylo použito asi 2,3 milionu kusů kamenných bloků, které na zemi spočívají tíhou asi 5 750 000 tun.

Kamenné bloky jsou opracovány s přesností 0,2 milimetru. Jsou uloženy vedle sebe s takovou přesností, že mezi bloky je stěží možno vsunout ostří břitvy. U mnohých techniků panuje názor, že je to podobné, jako kdyby se civilizace, která zvládá nejprimitivnější základy fyziky, pustila do stavby atomové bomby.

Dodnes vedou vědci diskuse o tom, jak vlastně byly takové kolosy vůbec postaveny. Údajně byly používány válce a soustavy pák, kterými byly na sebe skládány kameny, jež pak utvořily až 6 milionů tun těžký gigant.

Co myslíte vy?

#### Úloha 2:

- a) Kolik vážil jeden kamenný blok?
- b) Najděte na internetu informace o stáří, původu a umístění pyramidy.
- c) Která pyramida je považována za nejstarší?
- d) Kde všude na světě se stavěly pyramidy?

## Hustota, objem

### Úloha 1: Váleček z mincí

- Vezměte 10 stejných mincí a vytvořte sloupeček. Vypočítejte jeho objem.
- Pomocí digitálních vah určete hmotnost mincí.
- Vypočítejte hustotu mincí.
- Najděte na internetu, z čeho jsou mince vyrobeny, a z tabulek určete hustotu tohoto materiálu. Srovnejte.

### Úloha 2: Zpět k válečku z mincí

- Přidejte na sloupeček další tři mince.
- Změnil se objem? Určete nový objem.
- Změnila se hmotnost? Určete novou hmotnost.
- Změnila se hustota sloupečku mincí? Přesvědčte se výpočtem.



### Úloha 3: Změní se objem mincí, když některé z nich posuneme?



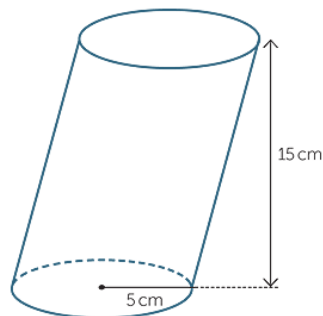
### Cavalieriho princip

Jestliže pro dvě tělesa existuje taková rovina, že každá rovina s ní rovnoběžná protíná obě tělesa v rovinných útvarech se stejnými obsahy, mají tělesa stejný objem.

Pokud máme dva stejné sloupce mincí (mince představují stejné rovinné útvary v předchozí větě), nezáleží na tom, jak jsou sloupce poskládané. Oba sloupečky mají stejný objem.

Podívejte se: <https://www.geogebra.org/m/ReZHP9Wj>

### Úloha 4: Vypočítejte objem kosého válce z obrázku:

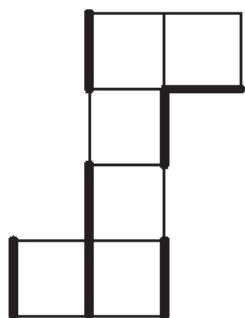
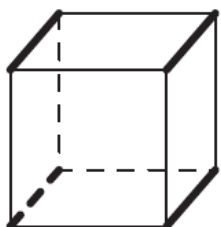


## Sítě krychle

### Barvení hran krychlové krabice

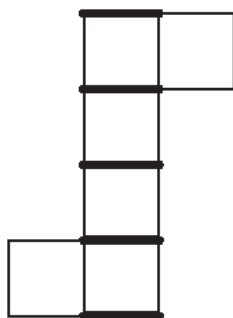
**Úloha 2:** Krychlová krabice na obrázku má obarveny čtyři rovnoběžné hrany. Dále jsou na obrázku nakresleny čtyři shodné sítě krychle s obarvenými některými stranami čtverců.

a) Je možné ze sítě složit krychlovou krabici z obrázku? Zakroužkuj správnou odpověď.



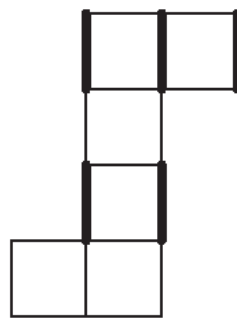
I.

I. ANO / NE



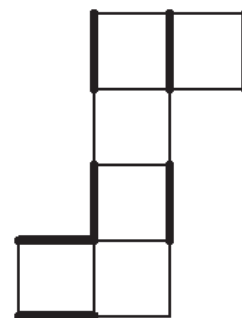
II.

II. ANO / NE



III.

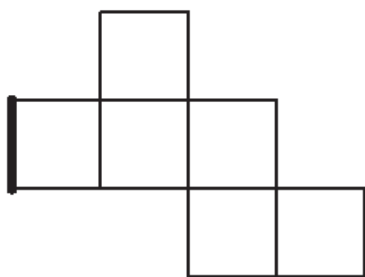
III. ANO / NE



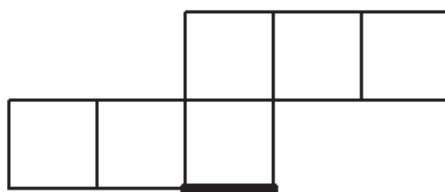
IV.

IV. ANO / NE

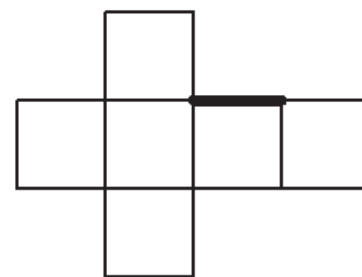
b) Na obrázku níže jsou nakresleny tři sítě krychle A, B, C. Na každé je jedna strana jednoho čtverce sítě obarvena. Obarvi další strany čtverců tak, aby po složení sítě měla krychle obarveny právě čtyři rovnoběžné hrany jako krychle na obrázku u úlohy a).



A



B



C

c) Formuluj pravidlo nebo soubor pravidel na obarvování stran čtverců jakékoli sítě krychle, která má obarveny právě čtyři rovnoběžné hrany.

d) U sítí A, B, C v úloze b) obarvi tu stranu čtverce, která spolu s již obarvenou stranou vytvoří jednu hranu krychle.

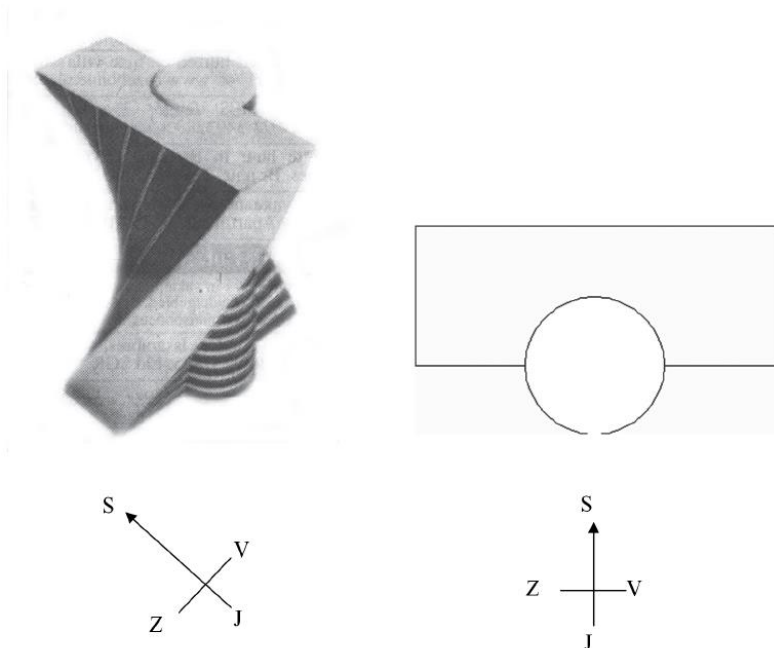
## Zkroucený dům

V moderní architektuře mívají domy často neobvyklý tvar. Na obrázku vidíme počítačový model „zkrouceného domu“ a půdorys jeho přízemí. Kříž světových stran ukazuje orientaci budovy.

V přízemí budovy je hlavní vchod a obchody. Nad přízemím je 20 pater s byty.

Půdorys každého patra je podobný půdorysu přízemí, ale má trochu jinou orientaci než patro pod ním.

Ve válci je výtahová šachta a vstupní prostory do každého patra.

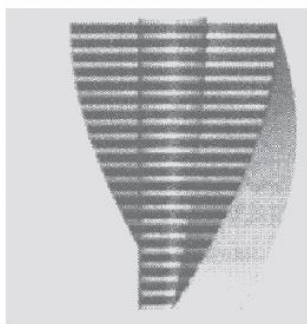


### Úloha 1:

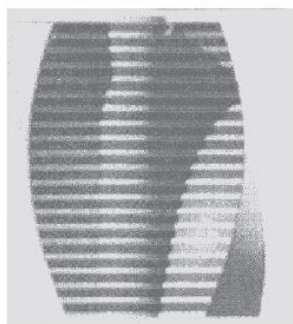
Odhadni celkovou výšku budovy v metrech. Odůvodni svůj postup.

### Úloha 2:

Na následujících obrázcích vidíme zkroucený dům ze stran.



Pohled 1



Pohled 2



Otázka 1: Z kterého směru byl pořízen pohled 1?

- A. od severu
- B. od západu
- C. od východu
- D. od jihu

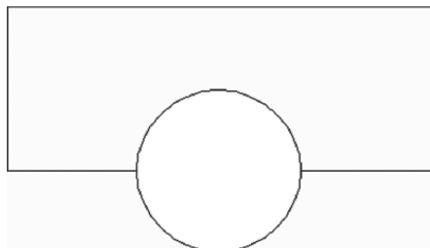
Otázka 2: Z kterého směru byl pořízen pohled 2?

- A. od severozápadu
- B. od severovýchodu
- C. od jihozápadu
- D. od jihovýchodu

### Úloha 3:

Každé patro s byty je trochu „pootočeno“ vzhledem k přízemí. Nejvyšší patro (20. patro) je kolmo na přízemí.

Obrázek znázorňuje přízemí.



Zakresli do tohoto obrázku půdorys 10. patra tak, aby z něj bylo zjevné, jak je toto patro umístěno vzhledem k přízemí.

Zkroucené domy opravdu existují, jak je vidět na následující fotografii:

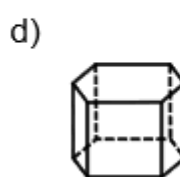
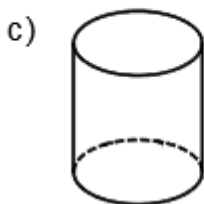
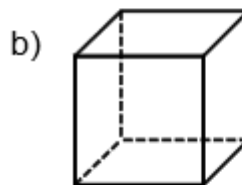
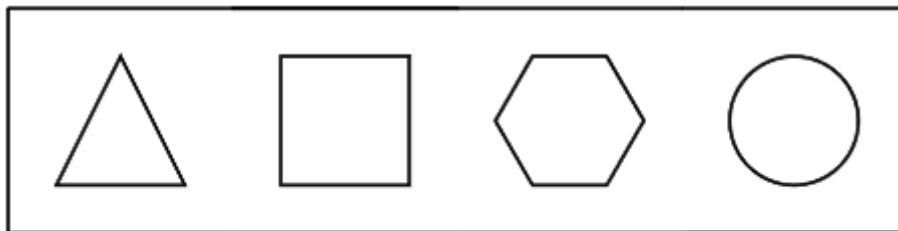


## Prostorová představivost

### Úloha 1:

Ke každému znázorněnému tělesu přiřaďte všechny otvory, kterými lze dané těleso „těsně bez mezer“ protáhnout na druhou stranu.

(V určitém okamžiku těleso funguje jako zátk.)



### Úloha 2:

Ve volném rovnoběžném promítání načrtni obrázek tělesa, které těsně projde skrz všechny 3 otvory:



## Kostky I

Na obrázku vpravo jsou dvě hrací kostky.

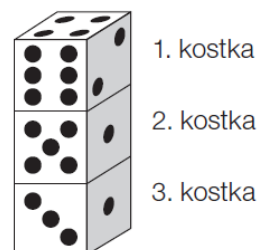
Hrací kostky jsou zvláštním případem krychlí s tečkami na stěnách, pro něž platí následující pravidlo: Celkový počet teček na dvou protilehlých stěnách je vždy sedm.



### Úloha 1:

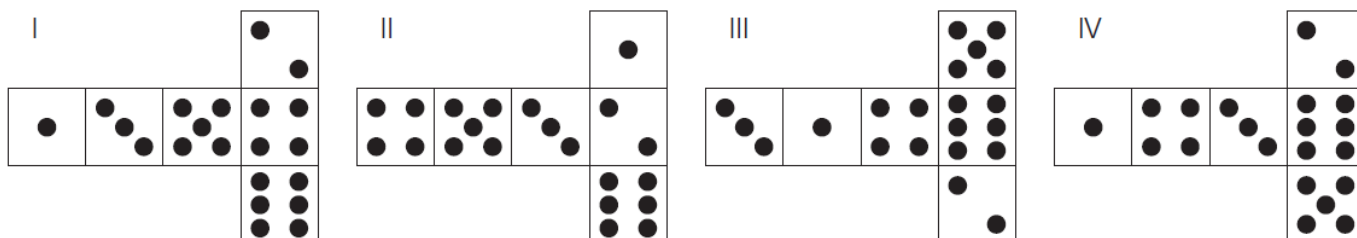
Vpravo jsou tři hrací kostky postavené na sobě. 1. kostka má nahoře čtyři tečky.

Kolik teček je **celkem** na pěti vodorovných stěnách, které nejsou vidět (spodek 1. kostky, spodek a vršek 2. a 3. kostky)?



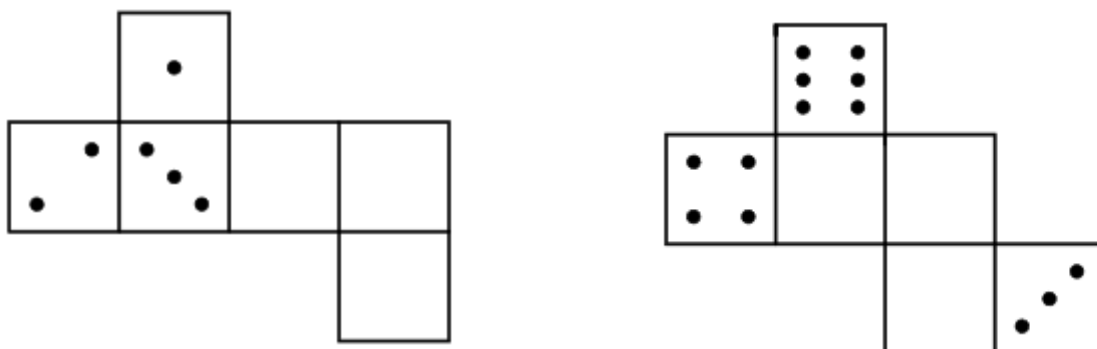
### Úloha 2:

Ze kterých z následujících útvarů lze složit krychli vyhovující požadavku, aby součet protilehlých stěn byl celkem 7?



### Úloha 3:

Doplňte „oči“ na síti hrací kostky tak, aby jich na protilehlých stěnách bylo vždy sedm.



# **FINANČNÍ GRAMOTNOST**

## Směnný kurz

Mei-Ling ze Singapuru se připravovala na tříměsíční studijní pobyt do Jižní Afriky. Potřebovala si vyměnit singapurské dolary (SGD) za jihoafrické randy (ZAR).



### Úloha 1:

Mei-Ling zjistila, že kurz singapurského dolaru k jihoafrickému randu je:  $1 \text{ SGD} = 4,2 \text{ ZAR}$

Mei-Ling si v tomto kurzu směnila 3000 singapurských dolarů na jihoafrické randy.

Kolik jihoafrických randů Mei-Ling dostala?

### Úloha 2:

Když se po třech měsících Mei-Ling vracela do Singapuru, zbývalo jí 3 900 ZAR.

Když si je měnila zpět na singapurské dolary, všimla si, že se kurz změnil na:  $1 \text{ SGD} = 4,0 \text{ ZAR}$

Kolik singapurských dolarů Mei-Ling dostala?

### Úloha 3:

Během těchto tří měsíců se kurz změnil ze 4,2 na 4,0 ZAR za SGD. Bylo pro Mei-Ling výhodné, že když měnila své jihoafrické randy zpět na singapurské dolary, byl kurz 4,0 ZAR místo 4,2 ZAR za jeden SGD? Odůvodni svou odpověď.



## Literatura a zdroje:

Opava, Z. Matematika kolem nás, Praha 1989

Hejný, M. a kol. Úlohy pro rozvoj matematické gramotnosti, 2012

Battaglia, O.R. Materials for Teaching Together: Science and Mathematics Teachers collaborating for better results, UP Olomouc 2016

Netradiční úlohy, Matematická gramotnost v mezinárodním výzkumu PISA, Praha 2006

Nemčíková, K. Matematická gramotnost ve výuce, Praha 2011

Fürst, T., Molnár, J., Pohaněl, K. A Guide to Three-dimensional Space, Olomouc 2005

<https://fred.fraus.cz/qf/cs/ramjet/knihovna/be3b76bbebef4d>

[www.realisticky.cz](http://www.realisticky.cz)

<https://dum.rvp.cz/materialy/site-krychle-a-kvadr.html>

<https://www.mathsisfun.com/>